OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- Clasa a VIII-a
18 februarie 2017 - Soluții și Bareme

1. Fie numărul $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

i) Determinaţi a^2

ii) Calculaţi $\left(1+a+2\sqrt{3}\right)^{2016}$

iii) Demonstraţi că $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \geq 2$, oricare ar fi x, număr natural.

Supliment GM 5/ 2016

i) $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| - \left|2+\sqrt{3}\right| = -2\sqrt{3}$............................**(2p)**

$a^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ ....**(1p)**

ii) La i) s-a calculat $a = -2\sqrt{3}$

$\left(1+a+2\sqrt{3}\right)^{2016} = \left(1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^{2016} = 1^{2016} = 1$ ....**(1p)**

iii) Observăm că $\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right) = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 = 49 - 48 = 1$ ....**(1p)**

$\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)} = 1$ de unde $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$ sau $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

Avem astfel: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x}$ ....**(1p)**

Notăm $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x = y > 0$. Ştim că $y + \frac{1}{y} \geq 2$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$

$y + \frac{1}{y} \geq 2 \iff y^2 - 2y + 1 \geq 0 \iff (y-1)^2 \geq 0$ ....**(1p)**

În concluzie $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \geq 2, \forall x \in \mathbb{N}$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- Clasa a VIII-a
18 februarie 2017 - Soluții și Bareme

2. Triunghiurile dreptunghice isoscele ABC şi ABC' $\left(m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABC'}) = 90°\right)$ sunt situate în plane perpendiculare. Aflaţi măsura unghiului dintre planele (BCC') şi (ACC').

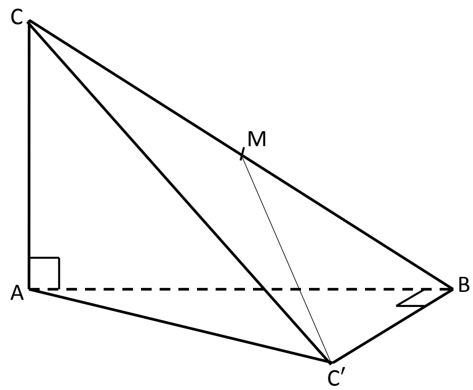

fig. **(1p)**

$(ABC\ ) \cap (ABC') = AB$
$BC' \perp AB$

$\left.\begin{matrix}(ABC) \cap (ABC') = AB \\ BC' \perp AB\end{matrix}\right\} \Longrightarrow BC' \perp (ABC)$ ....**(1p)**

$\left.\begin{matrix}BC' \perp (ABC) \\ BC' \subset (CBC')\end{matrix}\right\} \Longrightarrow (CBC') \perp (ABC)$

Fie M mijlocul lui $[BC] \Longrightarrow AM \perp CB,\ CB = (ABC) \cap (CBC')$ ....**(1p)**

Avem astfel: $pr_{CBC'}(\triangle\ CAC') = \triangle\ CMC'$În aceste condiţii $AM \perp (CBC')$

$\mathcal{A}_{CMC'} = \mathcal{A}_{CAC'} \cdot cos\alpha$, unde $\alpha = măs\left[(\widehat{CAC'), (CBC'})\right]$ ....**(1p)**
Notăm $AB = a$
$\mathcal{A}_{CMC'} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{CBC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ ....**(1p)**
$\mathcal{A}_{CAC'} = \frac{CA \cdot AC'}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ ....**(1p)**

$cos\alpha = \mathcal{A}_{CMC'} : \mathcal{A}_{CAC'} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60°.$
Prin urmare: $m\left[(\widehat{BCC'), (ACC'})\right] = 60°$ ....**(1p)**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- Clasa a VIII-a
18 februarie 2017 - Soluții și Bareme

3. Fie $x, y, z \in [0, 1]$.
a) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $E(x, y) = x^2y - xy^2$
b) Aflaţi valoarea maximă a expresiei
$$E(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2.$$

a) $E(x, y) = x^2y - xy^2 = xy(x - y)$
Dacă $x = y$, valoarea va fi 0. Dacă $x < y$ se vor obţine valori negative. ....**(1p)**
Pentru valoare maximă, căutăm valori pozitive cât mai mari, adică mai întâi $xy(x - y) > 0$ ceea ce implică $x > y$. Valoarea pentru $xy(x - y)$ va fi mai mare, cu cât x este mai mare. Cel mai mare este 1.
Deci maximul se realizează pentru $x = 1$. ....**(1p)**
Avem astfel $E(1, y) = \underbrace{y(1 - y) \leq \left(\frac{y+(1-y)}{2}\right)^2}_{ineg\ mediilor} = \frac{1}{4}$ ....**(1p)**
unde $E(1, y) = \frac{1}{4}$ pentru $y = \frac{1}{2}$.
Deci valoarea maximă este $\frac{1}{4}$ şi se obţine pentru $x = 1$ şi $y = \frac{1}{2}$. ....**(1p)**

b) $E(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2$,
adunăm şi scădem xyz, după care scriem ca produs:
$E(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)$ ....**(1p)**
Dacă oricare două dintre valorile lui x, y şi z sunt egale, expresia va avea valoare *0*.
Presupunem că $z = min\{x, y, z\}$
Atunci $(y - z)(x - z) = xy - yz - xz + z^2 = xy - z(x + y - z) \geq xy$
Egalitatea se realizează pentru $z = 0$.
În continuare analizăm situaţiile:

i) $z \leq x \leq y$
ceea ce conduce la $E(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z) \leq 0$, ...**(1p)**
variantă care nu ne interesează.

ii) $z \leq y \leq x$
ceea ce conduce la $(y - z)(x - z) \geq xy$, de unde obţinem
$(x - y)(y - z)(x - z) \leq xy(x - y) \leq \frac{1}{4}$,
cu egalitate dacă $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ şi $z = 0$.

În concluzie maximul căutat este $\frac{1}{4}$, iar acesta se obţine pentru:
$(x, y, z) \in \left\{\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ ....**(1p)**
Notă: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător