MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BISTRIȚA – NĂSĂUD

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- Clasa a VI-a

18 februarie 2017

Barem de corectare și notare

1. Să se determine numerele prime a, b, c, d pentru care numărul $\dfrac{3a+14b+6c}{12d}$ este natural.

Barem de corectare și notare:

$\dfrac{3a+14b+6c}{12d} \in \mathbb{N} \Rightarrow 12d \mid 3a+14b+6c$ 1p

$\left.\begin{array}{r} 12 \vdots 2 \Rightarrow 12d \vdots 2 \Rightarrow 3a+14b+6c \vdots 2 \\ 14b \vdots 2,\ 6c \vdots 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a \vdots 2,\ (3,2)=1 \Rightarrow a \vdots 2,\ a - prim \Rightarrow a=2$ 1p

Cum $a=2 \Rightarrow \dfrac{3\cdot 2+14b+6c}{12d} = \dfrac{2(3+7b+3c)}{12d} = \dfrac{3+7b+3c}{6d} \in \mathbb{N}$ 1p

$\left.\begin{array}{r} 6 \vdots 3 \Rightarrow 6d \vdots 3 \Rightarrow 3+7b+3c \vdots 3 \\ 3 \vdots 3,\ 3c \vdots 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7b \vdots 3,\ (7,3)=1 \Rightarrow b \vdots 3, b - prim \Rightarrow b=3$ 1p

Cum $b=3 \Rightarrow \dfrac{3+7\cdot 3+3c}{6d} = \dfrac{3(1+7+c)}{6d} = \dfrac{8+c}{2d} \in \mathbb{N}$ 1p

$\left.\begin{array}{r} 2 \vdots 2 \Rightarrow 2d \vdots 2 \Rightarrow 8+c \vdots 2 \\ 8 \vdots 2 \end{array}\right\} c \vdots 2, c - prim \Rightarrow c=2$ 1p

$d = 5$ nr. prim 1p

2. Se dau numerele $a = 2^{2n}\cdot 3^n + 2\cdot 6^n \cdot \left(8^{2n}\right)^6 : \left(32^n\right)^7 + 12^{n+1}\cdot\left(3^{3^2} - 3^{2^3}\right) : \left(3^4\right)^2 - 2\cdot 4^n \cdot 3^n$,

$b = 100\cdot\left(5+5^2+5^3+...+5^{2017}\right), c = 65^n - 5^n,\ n \in N^*$. Determinați restul împărțirii numerelor a, b, c la 60.

Barem de corectare și notare:

$a = 12^n + 2\cdot 12^n + 2\cdot 12^{n+1} - 2\cdot 12^n = 12^n \cdot 25 \Rightarrow a \vdots 60 \Rightarrow r=0$ 3p

$5+5^2 = 30 \vdots 3$, dar sunt un număr impar de termeni

$\Rightarrow b = 100\cdot\left[5+5^2\cdot(1+5)+5^4\cdot(1+5)+...+5^{2016}\cdot(1+5)\right] = 500+100\cdot 6\cdot\left(5^2+5^4+...+5^{2016}\right) =$

$\Rightarrow b = 20+60\cdot 8+10\cdot 60\cdot\left(5^2+5^4+...+5^{2016}\right) = 20+60\cdot\left[8+10\cdot\left(5^2+5^4+...+5^{2016}\right)\right]$, $20 < 60$, deci restul cerut este 20 .... 2p

$c = 5^n \cdot (13^n - 1)$, $13^n - 1 = 12 \cdot M + 1 - 1 = 12M, M \in N \Rightarrow c \vdots 60$, deci restul cerut este 0 .... 2p

3. Fie punctele O, A_1, A_2, $A_3, ...,$ A_{2017} situate dreapta d, în această ordine, astfel încât $OA_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2A_1A_2$, $A_3A_4 = 2A_2A_3$, ..., $A_{2016}A_{2017} = 2A_{2015}A_{2016}$.

   Punctele interioare segmentelor $[OA_1], [A_2A_3]$, ..., $[A_{2016}A_{2017}]$ se colorează în roșu, iar punctele interioare segmentelor $[A_1A_2], [A_3A_4]$, ..., $[A_{2015}A_{2016}]$ se colorează în verde.

   a) Calculați lungimea segmentului $[A_1A_9]$.

   b) Demonstrați că punctul A_{20} este mijlocul segmentului $[OA_{21}]$.

   c) Dacă M $\in$ (OA_1 astfel încât OM = 2017, precizați dacă acesta este colorat cu verde sau roșu.

Barem de corectare și notare:

a) $A_2A_3 = 2$, $A_3A_4 = 2^2$, $A_4A_5 = 2^3$, ... , $A_{2016}A_{2017} = 2^{2015}$ 1p

$A_1A_9 = OA_9 - OA_1$, $OA_9 = OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_8A_9 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^7 =$

$= 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^7 = 2^2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^7 = 2^3 + 2^3 + ... + 2^7 = ... = 2^7 + 2^7 = 2 \cdot 2^7 = 2^8$

$A_1A_9 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ 1p

b) A_{20} este mijlocul segmentului $[OA_{21}] \Leftrightarrow OA_{20} = A_{20}A_{21}$ 1p

$OA_{20} = 2^{19}$, $OA_{21} = 2^{20}$, $A_{20}A_{21} = OA_{21} - OA_{20} = 2^{20} - 2^{19} = 2^{19}(2-1) = 2^{19}$ 1p

c) $2^{10} = 1024 < 2017 < 2^{11} = 2048 \Rightarrow$ 1p

Cum $\Rightarrow OA_{11} < OM < OA_{12} \Rightarrow M \in (A_{11}, A_{12})$ 1p

deci M este colorat în verde 1p