OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- Clasa a V-a
18 februarie 2017

1. Fie numărul natural $x = 20 \cdot 5^{2015} \cdot 2^{2014} - 2017$.
a) Arătați că numărul $x + 2017$ ***este pătrat perfect și cub perfect.***
b) Determinați câtul și restul împărțirii numărului x ***la*** 10^3.

Barem de corectare

a) $x + 2017 = 10^{2016}$ 1p

$x + 2017 = \left(10^{1008}\right)^2$ este pătrat perfect.. 1p

$x + 2017 = 10^{2016} = \left(10^{672}\right)^3$ 1p

b) $x = 10^{2016} - 2017 = 1\underbrace{0....0000}_{2016\, cifre\, de 0} - 2017$ 1p

$x = 99...97983 = \underbrace{99...97}_{2013\, cifre} \cdot 10^3 + 983$ 1p

$c = \underbrace{99...97}_{2013\, cifre},\ r = 983$ 2p

2. Date fiind mulțimile

$$\boldsymbol{A} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \,\middle|\, \boldsymbol{x} < \left(\boldsymbol{2^{2016}} + \boldsymbol{2^{2017}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{3^{2018}} + \boldsymbol{3^{2019}}\right)\right\}$$

și

$$\boldsymbol{B} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \geq \left(\boldsymbol{3^{2016}} + \boldsymbol{3^{2017}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{2^{2018}} + \boldsymbol{2^{2019}}\right)\right\},$$

aflați numărul elementelor mulțimii $A \cap B$.

Barem de corectare

$A=\{0,1,2,3,....,a-1\}$, $a=\left(2^{2016}+2^{2017}\right)\cdot\left(3^{2018}+3^{2019}\right)=2^{2018}\cdot 3^{2019}$ ………………….. 2p

$B=\{b,b+1,b+2,b+3,....\}$, $b=\left(3^{2016}+3^{2017}\right)\cdot\left(2^{2018}+2^{2019}\right)=2^{2020}\cdot 3^{2017}$ ……..……… 2p

$a>b$ ………………………………………………………………………………….… 1 p

Numărul elementelor este egal cu $\left(a-1\right)-\left(b-1\right)=2^{2018}\cdot 3^{2017}\cdot 5$ ……………………… 2p

3. Cinci copii au împreună 460 ***de vederi. Dacă unul dintre ei dă celorlalți patru copii câte patru vederi, atunci numerele vederilor fiecărui copil ar fi cinci numere consecutive.***
Câte vederi are fiecare copil?

G M nr. 10/2016

Barem de corectare

$a+b+c+d+e=460=x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)$ ……………….1p

$5x+10=460$; $x=90$, iar cele cinci numere consecutive ar fi 90; 91; 92; 93 și 94 ……. 1p

cazul I: $a-16=90$, $\boldsymbol{a=106}$, $b+4=91$, $\boldsymbol{b=87}$, $c+4=92$, $\boldsymbol{c=88}$, $d+4=93$,

$\boldsymbol{d=89}$, $e+4=94$, $\boldsymbol{e=90}$ ……………………………………………………………… 1p

cazul II: $a+4=90$, $\boldsymbol{a=86}$, $b-16=91$, $\boldsymbol{b=107}$, $\boldsymbol{c=88}$, $\boldsymbol{d=89}$, $\boldsymbol{e=90}$ …..… 1p

cazul III: $a=\boldsymbol{86}$, $b=\boldsymbol{87}$, $c-16=92$, $c=\boldsymbol{108}$, $d=\boldsymbol{89}$, $e=\boldsymbol{90}$ ………..…………… 1p

cazul IV: $a=\boldsymbol{86}$, $b=\boldsymbol{87}$, $c=\boldsymbol{88}$, $d-16=\boldsymbol{93}$, $d=\boldsymbol{109}$, $e=\boldsymbol{90}$ ……………………... 1p

cazul V: $a=\boldsymbol{86}$, $b=\boldsymbol{87}$, $c=\boldsymbol{88}$, $d=\boldsymbol{89}$, $e-16=\boldsymbol{94}$, $e=\boldsymbol{110}$ …..…………………... 1p